Exponentielle Zusammenhänge

Der Lernbereich bietet vielfältige Möglichkeiten der Vernetzung einerseits mit bereits behandelten Inhalten (z.B. lineare Zusammenhänge) und andererseits mit zukünftig zu behandelnden Feldern (z.B. Differentialrechnung, stetige Beschreibung von Wachstumsvorgängen). Bei der Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum ergibt sich bei speziellen Konstellationen ein begrenztes Wachstum. Die Zusammenhänge sind anschaulich relativ einfach zugänglich, sodass sich vielfältige Gelegenheiten für die Vorbereitung eines propädeutischen Grenzwertbegriffs und damit Vernetzungen zum Lernbereich ‚Näherungsverfahren als Grenzprozesse – Zahlbereichserweiterungen' ergeben.

Dabei kann die iterative Beschreibung von Vorgängen als eine weittragende Idee der Mathematik in den Blick genommen, erläutert und gegenüber der expliziten Beschreibung abgegrenzt werden. ‚Was heute ist, ist eine direkte Folge von dem, was gestern war, und das wiederum eine Folge von dem, was vorgestern war, …' ist eine letztlich vielleicht triviale, aber ebenso wichtige Erkenntnis für Schülerinnen und Schüler: Der Ist-Zustand setzt sich zusammen aus dem Vorgänger-Zustand und einer Änderung. Gelingt es, diese Änderung geeignet durch Einflussfaktoren zu modellieren, so kann der Verlauf iterativ beschrieben und untersucht werden. Viele Vorgänge lassen sich iterativ, aber nur schwierig oder gar nicht explizit beschreiben (z.B. Ratenzahlungsprobleme) oder aber explizit und nicht iterativ (z.B. Sinusfunktion). Digitale Mathematikwerkzeuge helfen zur Berechnung und zum Erstellen von Prognosen. Es bietet sich an, Tabellenkalkulation zur Berechnung und Visualisierung der Prozesse einzusetzen.

Im gesamten Lernbereich ergeben sich vielfältige Anlässe zum Modellieren und Argumentieren, z.B. bei der diskreten iterativen oder expliziten Anpassung von Daten, der Klassifizierung der Überlagerung.

Untersuchung exponentiellen Wachstums – iterativ und explizit

Exponentielle Wachstumsvorgänge können sinnvoll z.B. über ein Zinseszinsproblem, exponentielle Zerfallsvorgänge z.B. über ein Spiel zunächst iterativ beschrieben werden. Die explizite Darstellung ergibt sich dann in einfacher Weise.

Beispielaufgabe: Spielerischer Einstieg. Statt Spielsteine können auch z.B. ‚m&m's' verwendet werden, um den Einstieg noch schmackhafter zu machen … Bei dieser Aufgabenstellung ergeben sich Vernetzungen zur Stochastik.

Spielregeln:
Ihr erhaltet je Gruppe ca. 200 ‚Spielsteine'. Falls diese noch unmarkiert sind, markiert sie auf einer Seite mit einem Filzstift-Punkt.
(1) Vier Spielsteine werden auf den Tisch ‚gewürfelt'.
(2) Zu jedem Stein mit oben liegendem Punkt wird ein Stein dazugelegt.
(3) Alle auf dem Tisch liegenden Steine zusammen werden wieder auf den Tisch ‚gewürfelt'.
(4) Siehe (2)!

Schätzt, wie lange ein Spiel dauert, bis alle Spielsteine auf dem Tisch liegen.

Spielt!

Stellt die Daten graphisch dar.

Schätzt zuerst und überlegt dann, wie man vielleicht Lösungen ‚errechnen' kann.
Wie lange kann man mit 5000 Spielsteinen spielen?
Wie viele Spielsteine braucht man, damit das Spiel 30 Würfe lang dauert?

Die Untersuchung der Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x + c$ ermöglicht die Klassifizierung nach den Parametern a, b und c. Die Verschiebung in x-Richtung kann binnendifferenzierend untersucht werden.

Tabellarische Zusammenfassung der Inhalte

Zunahme- oder Abnahmeprozesse werden als Wachstumsvorgänge bezeichnet.

Wachstumsvorgänge können iterativ oder explizit beschrieben werden. Die Darstellung gibt an, wie sich die wachsende Größe pro Zeiteinheit verändert.

Durch die Darstellung ergibt sich eine Folge von Werten u(0), u(1), u(2) … .

u(0) ist der Startwert der Folge, u(1), u(2), … nennt man erstes, zweites, … Folgenglied.

Lineares Wachstum

rekursive Darstellung:

$u(n) = u(n-1) + d; \quad u(0) = ...$

$u(n) - u(n-1) = d$

d: konstante Änderung

u(0): Startwert

explizite Darstellung:

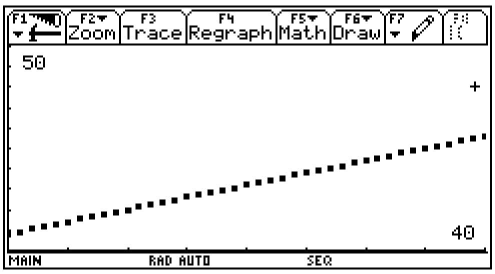
$u(n) = u(0) + d \cdot n$

Beispiel:

$u(n) = u(n-1) + 0{,}6$

$u(0) = 4$

n	0	1	2	3	
u(n)	4	4,6	5,2	5,8	



d > 0: Zunahmeprozess

d < 0: Abnahmeprozess

Exponentielles Wachstum

rekursive Darstellung:

$u(n) = u(n-1) + w \cdot u(n-1) = k \cdot u(n-1); \quad u(0) = ...$

$\frac{u(n)}{u(n-1)} = k$

w: prozentuale Änderung bzw. k: Wachstumsfaktor;

u(0): Startwert

explizite Darstellung:

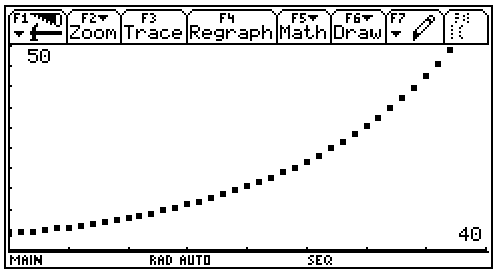
$u(n) = u(0) \cdot k^n$

Beispiel:

$u(n) = u(n-1) + 0{,}07 \cdot u(n-1) = 1{,}07 \cdot u(n-1)$

$u(0) = 4$

n	0	1	2	3	
u(n)	4	4,28	4,5796	4,9002	



k > 1: Zunahmeprozess

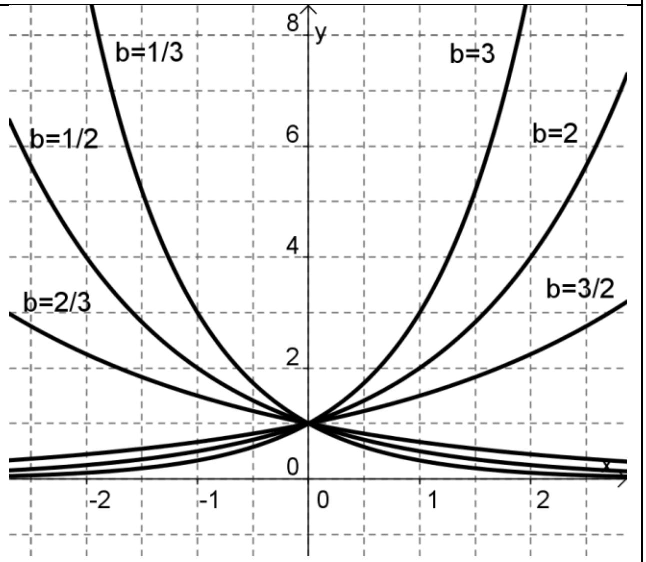
0 < k < 1: Abnahmeprozess

A: Eigenschaften von Exponentialfunktionen

Für jede Funktion f mit $f(x) = b^x$; $x \in \mathbb{R}$ und beliebiger positiver Basis $b \neq 1$ gilt:

- Der Graph von f
  - steigt für $b > 1$;
  - sinkt für $0 < b < 1$.
- Der Graph von f liegt oberhalb der x-Achse. Jede positive Zahl kommt als Funktionswert von f vor.
- Der Graph von f schmiegt sich
  - für $b > 1$ dem negativen Teil der x-Achse an,
  - für $0 < b < 1$ dem positiven Teil der x-Achse an.

  Die x-Achse ist **Asymptote**.
- Alle Graphen haben den Punkt $P(0|1)$ und nur diesen Punkt gemeinsam.



B: Verändern der Graphen von Exponentialfunktionen

Streckung/Stauchung in y-Richtung Multiplikation mit Faktor a $\boxed{f(x) = a \cdot b^x}$ $a > 1$: Streckung in y-Richtung $0 < a < 1$: Stauchung in y-Richtung Für negatives a zusätzlich Spiegelung des Graphen an der x-Achse	**Streckung/Stauchung in x-Richtung** Multiplikation des Exponenten mit Faktor k $\boxed{f(x) = b^{k \cdot x}}$ $f(x) = b^{k \cdot x} = \left(b^k\right)^x = r^x$ Ändern der Basis bewirkt Streckung/Stauchung des Graphen in x-Richtung.
Verschiebung in y-Richtung Addition einer Konstanten d $\boxed{f(x) = b^x + d}$ Addition einer Konstanten d bewirkt eine Verschiebung des Graphen in y-Richtung	**Verschiebung in x-Richtung (nicht im Kern)** Subtraktion einer Konstanten c im Exponenten $\boxed{f(x) = b^{x-c}}$ $f(x) = b^{x-c} = b^x \cdot b^{-c} = b^{-c} \cdot b^x = a \cdot b^x$ Verschiebung in x-Richtung bewirkt gleichzeitig Streckung/Stauchung des Graphen in y-Richtung.
Spiegelung an der y-Achse Multiplikation des Exponenten mit -1 $\boxed{f(x) = b^{-x}}$ $f(x) = b^{-x} = \frac{1}{b^x} = \frac{1^x}{b^x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ Kehrwertbilden der Basis bewirkt Spiegelung des Graphen an der y-Achse.	**Spiegelung an x-Achse** Multiplikation des gesamten Terms mit -1 $\boxed{f(x) = -\left(b^x\right)}$ Multiplikation des Terms mit -1 bewirkt eine Spiegelung des Graphen an der x-Achse

Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum

Exponentielles und lineares Wachstum können häufig in Überlagerung auftreten.

iterative Darstellung: $u(n) = u(n-1) + \boxed{w \cdot u(n-1)} + \boxed{\boxed{d}}$ $\qquad u(n) = k \cdot u(n-1) + d$

$\boxed{\text{Exponentiell}}$ $\boxed{\boxed{\text{Linear}}}$

Theoretisch können dann vier verschiedene Möglichkeiten auftreten:

(1) Exponentielle Zunahme und lineare Zunahme [$w > 0$ bzw. $k > 1$; $d > 0$]

(2) Exponentielle Zunahme und lineare Abnahme [$w > 0$ bzw. $k > 1$; $d < 0$]

(3) Exponentielle Abnahme und lineare Zunahme [$w < 0$ bzw. $k < 1$; $d > 0$]

(4) Exponentielle Abnahme und lineare Abnahme [$w < 0$ bzw. $k < 1$; $d < 0$]

Fall (1): Je nach Anfangswert u(0) lässt sich der Verlauf folgendermaßen klassifizieren:

Für u(0)>0 lässt sich erschließen, dass die Werte gegen $+\infty$ streben:
„Das Guthaben wird verzinst, es kommen konstante Einzahlungen hinzu.“

Für u(0)<0 lässt sich erschließen, dass die Werte gegen $+\infty$ streben, wenn $|w \cdot u(0)| < d$ gilt:
„Ich baue durch konstante Einzahlungen zunächst meine Schulden ab und danach Guthaben auf.“

Für u(0)<0 lässt sich erschließen, dass die Werte gegen $-\infty$ streben, wenn $|w \cdot u(0)| > d$ gilt:
„Die regelmäßigen Einzahlungen sind kleiner als die Zinsen. Die Verschuldung nimmt zu.“

Es lässt sich erschließen, dass die Werte konstant bleiben, wenn $|w \cdot u(0)| = d$ gilt:
„Ich bin lediglich in der Lage meine Verschuldung konstant zu halten, weil ich nur die Schuldzinsen begleiche.“

Fall (2): Je nach Anfangswert u(0) lässt sich der Verlauf folgendermaßen charakterisieren:

Es lässt sich erschließen, dass die Werte gegen $+\infty$ streben, wenn $w \cdot u(0) > |d|$ gilt:
„Die Zinsen sind größer als die regelmäßigen Auszahlungen.“

Es lässt sich erschließen, dass die Werte gegen $-\infty$ streben, wenn $w \cdot u(0) < |d|$ gilt:
„Die Zinsen sind kleiner als die regelmäßigen Auszahlungen. Ich lebe über meinen Verhältnissen.“

Es lässt sich erschließen, dass die Werte konstant bleiben, wenn $w \cdot u(0) = |d|$ gilt:
„Ich lasse mir lediglich die Zinsen regelmäßig auszahlen.“

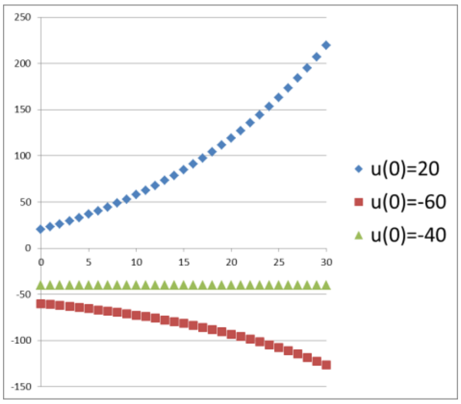
Fall (3): **Begrenztes Wachstum:** Unabhängig vom Anfangswert u(0) nähern sich die Werte einem Grenzwert G.

Beispiel: konstante Zugabe eines Wirkstoffs, überlagert mit prozentualem Abbau.

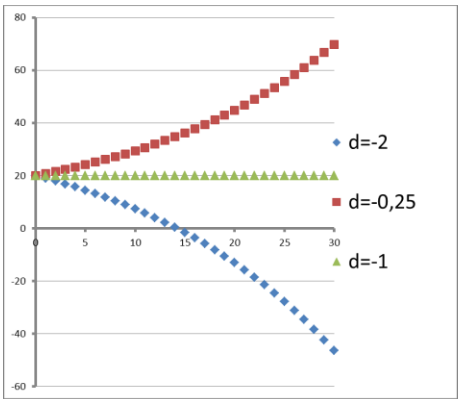
Fall (4): **Begrenztes Wachstum:** Unabhängig vom Anfangswert u(0) nähern sich die Werte einem Grenzwert G.

Beispiele

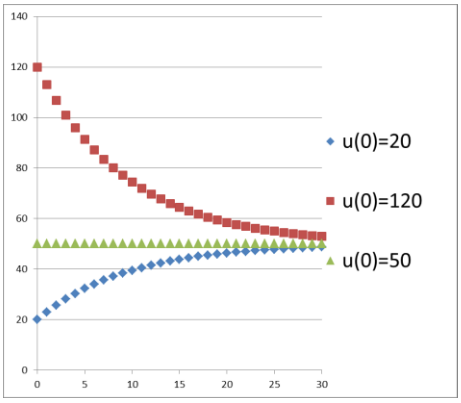
(1) $u(n) = u(n-1) + 0{,}05 \cdot u(n-1) + 2$



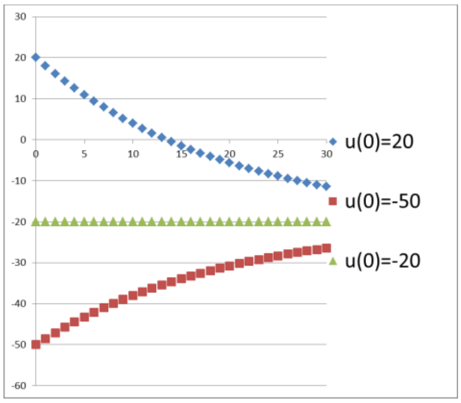
(2) $u(n) = u(n-1) + 0{,}05 \cdot u(n-1) + d,\ u(0) = 20$



(3) $u(n) = u(n-1) - 0{,}1 \cdot u(n-1) + 5$



(4) $u(n) = 0{,}95 \cdot u(n-1) - 1$



Begründung der Existenz und Berechnung des Grenzwertes G für begrenztes Wachstum

Die **Existenz eines Grenzwertes** kann mit Hilfe der zugehörigen Graphen etwa wie unten dargestellt begründet werden. Es ergeben sich vielfältige Möglichkeiten für Argumentationen. Dabei reicht es, den für anschauliche Anwendungen ausreichenden Fall (3) zu betrachten. Wie komplex und ausführlich die Begründungen ausgeführt werden, hängt von der Lerngruppe ab. Binnendifferenzierend können die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler auch Begründungen für den Fall (4) finden.

Fall (3) *[w<0, d>0]:*

Zunächst Überlegungen für positive Startwerte: u(0)>0:

Gilt $|w \cdot u(0)| > d$, so werden die Werte bei jedem Schritt kleiner, da die prozentuale Abnahme stets größer ist als die konstante Zunahme. Weil die Werte kleiner werden, werden wiederum die prozentualen Abnahmen von Schritt zu Schritt kleiner, bleiben aber größer als d. Die Summe aus prozentualer Abnahme und konstanter Zunahme ist stets negativ und geht gegen Null, das Wachstum gegen eine Grenze G>0.

Gilt $|k \cdot u(0)| < d$, so werden die Werte bei jedem Schritt größer, da die prozentuale Abnahme stets kleiner ist als die konstante Zunahme. Weil die Werte größer werden, werden wiederum die prozentualen Abnahmen von Schritt zu Schritt größer, bleiben aber kleiner als d. Die Summe aus prozentualer Abnahme und konstanter Zunahme ist stets positiv und geht gegen Null, das Wachstum gegen eine Grenze G>0.

Für negative Startwerte u(0)<0 überlagern sich die Zuwächse so lange gleichgerichtet, bis die Werte positiv sind und die obigen Überlegungen entsprechend greifen. Da die Beträge kleiner werden, wird auch hier der Zuwachs von Schritt zu Schritt stets kleiner.

Fall (4) *[w<0, d<0]:*

Zunächst Überlegungen für negative Startwerte u(0)<0:

Gilt $w \cdot u(0) > |d|$, so werden die Werte bei jedem Schritt betragsmäßig kleiner, da die prozentuale Abnahme des Betrages stets größer ist als dessen konstante Zunahme. Weil die Werte betragsmäßig kleiner werden, werden wiederum die prozentualen Abnahmen der Beträge von Schritt zu Schritt kleiner, bleiben aber vom Betrag größer als d. Die Summe aus prozentualer Abnahme und konstanter Zunahme ist stets positiv und geht gegen Null, das Wachstum gegen eine Grenze G<0.

Gilt $k \cdot u(0) < |d|$, so werden die Werte bei jedem Schritt betragsmäßig größer, da die prozentuale Abnahme des Betrages stets kleiner ist als seine konstante Zunahme. Weil die Werte betragsmäßig größer werden, werden wiederum die prozentualen Abnahmen der Beträge von Schritt zu Schritt größer, bleiben aber vom Betrag kleiner als d. Die Summe aus prozentualer Abnahme und konstanter Zunahme ist stets negativ und geht gegen Null, das Wachstum gegen eine Grenze G<0.

Für positive Startwerte u(0)>0 überlagern sich die Zuwächse so lange gleichgerichtet, bis die Werte negativ sind und die obigen Überlegungen entsprechend greifen. Da die Beträge kleiner werden, wird auch hier die Abnahme von Schritt zu Schritt stets kleiner.

Berechnung des existierenden Grenzwertes (Gleichwichtszustands) für begrenztes Wachstum

Im Grenzfall müssen sich beide Änderungen aufheben, sodass die resultierende Änderung null ist:

$$w \cdot G + d = 0 \qquad\qquad (1-k) \cdot G = d$$

$$G = \frac{-d}{w} \qquad \text{oder} \qquad G = \frac{d}{1-k}$$

Zusammenhang zwischen iterativer und expliziter Beschreibung begrenzten Wachstums

Die folgenden Überlegungen sind deutlich über den Kern hinausgehend. Binnendifferenzierend werden hier aber leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler sinnvoll gefördert.

Die Graphen lassen vermuten, dass es sich um eine um die Grenze G in y-Richtung verschobene Exponentialfunktion handelt. Der Ansatz, den Wachstumsfaktor k für die Exponentialfunktion anzunehmen, ist dabei naheliegend. Wir machen also für f den Ansatz: $f(x) = G + k^x = \frac{d}{1-k} + k^x$.

Der Ansatz kann durch Einsetzen bestätigt werden:

$$f(x-1) = \frac{d}{1-k} + k^{x-1}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= k \cdot f(x-1) + d \\
&= k \cdot \left(\frac{d}{1-k} + k^{x-1} \right) + d \\
&= \frac{k \cdot d}{1-k} + k^x + d \\
&= \frac{k \cdot d}{1-k} + \frac{(1-k) \cdot d}{1-k} + k^x \\
&= \frac{k \cdot d + d - k \cdot d}{1-k} + k^x \\
&= \frac{d}{1-k} + k^x
\end{aligned}$$

Eine weitere Möglichkeit ist zu argumentieren, dass die Differenz aus Grenze und Funktionswerte eine fallende Exponentialfunktion ist:
$u(n) = k \cdot u(n-1) + d$
Man macht wiederum den Ansatz, dass sich für $0 < k < 1$ im Grenzfall der exponentielle und der lineare Anteil aufheben:
$d = G \cdot (1-k)$.

Dann ergibt sich $u(n) - G = k \cdot (u(n-1) - G)$.

Nun weiß man, dass $u_n - G$ exponentiell fällt.

Daher gilt: $u(n) - G = k^n \cdot (u(0) - G)$ bzw. $u(n) = (u(0) - G) \cdot k^n + G$ bzw. als explizite Formel.
Der obige Ansatz ist auch möglich, wenn der Prozess nicht begrenzt ist und somit G keine Grenze darstellt. Das ist der Fall, wenn $k \geq 1$ ist. In diesem Fall ist die Differenz aus Grenze und Funktionswerten keine fallende Exponentialfunktion.

Logarithmen

Sind y und b zwei positive Zahlen ($b \neq 0$), heißt die Zahl, mit der man b potenzieren muss, um y zu erhalten, der **Logarithmus von y zur Basis b**.

Schreibweise: $\mathbf{\log_b(y)}$.

$$x = \log_b(y) \text{ und } b^x = y.$$

Beispiele:

Löse $\mathbf{3^x = 243}$ bedeutet: Bestimme die Zahl, mit der man 3 potenzieren muss, damit sich 243 ergibt. Dafür schreibt man $\mathbf{x = \log_3(243)}$.	Bestimme $\mathbf{\log_2(32)}$ bedeutet: Bestimme die Zahl, mit der man 2 potenzieren muss, damit sich 32 ergibt. Gesucht ist also eine Zahl x, so dass gilt: $\mathbf{2^x = 32}$.

Hinweise zu hilfsmittelfreien Fertigkeiten und zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

Hilfsmittelfreie Fertigkeiten

Die Schülerinnen und Schüler sollen:

1. für einfache lineare und exponentielle Wachstumsvorgänge iterative und explizite Darstellungen finden und weitere Werte berechnen können.
2. für begrenzte Wachstumsvorgänge die Iterationsformel aufstellen können.
3. Wachstumsvorgänge durch ihre Änderung charakterisieren und durch geeignete Modelle beschreiben (linear: konstanter Summand, exponentiell: konstanter Faktor).
4. zu einer gegebenen hinreichend einfachen Exponentialfunktion den zugehörigen Graphen skizzieren können und zu einem gegebenen Graphen den zugehörigen Term nennen.
5. Terme der Form $a \cdot b^{cx+d}$ zu Termen der Form $a \cdot b^x$ vereinfachen.
6. die Logarithmenschreibweise für die Lösung einer Exponentialgleichung verwenden und den Wert einfacher Logarithmen angeben.
7. Lösungen von Exponentialgleichungen in einfachen Fällen exakt angeben können (z.B. $5^x = 125$).

Fertigkeiten im Umgang mit digitalen Mathematikwerkzeugen

Im Umgang mit digitalen Mathematikwerkzeugen sollen die Schülerinnen und Schüler im Lernbereich folgende Kompetenzen erwerben bzw. festigen:

1. Folgendefinitionen im in der Schule eingeführten Werkzeug eingeben und darstellen können.
2. Tabellen und Graphen zur Bestimmung von Lösungen nutzen können.
3. Untersuchungen von Funktionsgraphen mit Parametervariation durchführen können.
4. Tabellenkalkulationen zur iterativen Berechnung nutzen können.

AUSZÜGE AUS DEM KERNCURRICULUM

3.2.1 Zahlen und Operationen

		• interpretieren exponentielle Abnahme und begrenztes Wachstum als Grenzprozesse.

3.2.4 Funktionaler Zusammenhang

		• beschreiben quadratische, exponentielle und periodische Zusammenhänge zwischen Zahlen und zwischen Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten, erläutern und beurteilen sie.
		• nutzen quadratische Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
		• stellen Funktionen durch Gleichungen dar und wechseln zwischen den Darstellungen Gleichung, Tabelle, Graph.
		• modellieren lineares, exponentielles und begrenztes Wachstum explizit und iterativ auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
		• interpretieren den Wachstumsfaktor beim exponentiellem Wachstum als prozentuale Änderung und grenzen lineares und exponentielles Wachstum gegeneinander ab.
		• beschreiben und begründen Auswirkungen von Parametervariationen bei quadratischen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinus- und Kosinusfunktionen, auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge.
		• beschreiben und begründen die Auswirkungen der Parameter auf den Graphen für Funktionen mit $y = a \cdot f\left(b \cdot (x - c)\right) + d$.

Lernbereich: Exponentielle Zusammenhänge

Intentionen

Ausgehend von der Idee des prozentualen positiven bzw. negativen Zuwachses wird exponentielles Wachstum iterativ eingeführt und auch explizit beschrieben sowie gegen lineares Wachstum abgegrenzt.

Die iterativ beschriebene Überlagerung aus exponentiellem und linearem Wachstum in der Form $b(n) = b(n-1) + w \cdot b(n-1) + d$ mit $w \geq -1$ bzw. $b(n) = k \cdot b(n-1) + d$ mit $k \geq 0$ führt auf vier Fälle, die in Abhängigkeit des Anfangswertes sowie der Parameter d und w bzw. k untersucht und mit Sachsituationen verknüpft werden. Zusammenhänge zwischen iterativer und expliziter Beschreibung begrenzten Wachstums werden hergestellt. In den Fällen, in denen sich begrenztes Wachstum ergibt, kann die Grenze G bestimmt werden.

Die Grenzprozesse bei exponentiellem Zerfall und begrenztem Wachstum werden im Lernbereich „Näherungsverfahren als Grenzprozesse - Zahlbereichserweiterungen“ wieder aufgegriffen.

Die leitenden Fragestellungen bei der Untersuchung der Auswirkungen von Parametervariationen auf Funktionsgraphen und Funktionsgleichungen, die den Schülerinnen und Schülern von den linearen und quadratischen Funktionen bekannt sind, werden hier auf exponentielle Zusammenhänge übertragen. Ein vertieftes Verständnis wird durch den Darstellungswechsel Gleichung – Graph – Tabelle gefördert.

Die Schülerinnen und Schüler sollen die Bedeutung der Parameter erläutern und insbesondere die Graphen der durch f mit $f(x) = a \cdot b^x$ für positive b definierten Funktionen skizzieren können.

Die Rechengesetze für Potenzen werden genutzt, um Erkenntnisse über die Funktionen oder einen zugehörigen Sachzusammenhang zu gewinnen.

Der Logarithmus wird nur als Sprechweise für die Lösung der Gleichung $b^x = a$ eingeführt und höhere Wurzeln werden als Sprechweise für die Lösung der Gleichung $x^a = b$ genutzt. Beim Einsatz von CAS zur Lösung komplexerer Gleichungen ist das Verständnis der Rechnerausgabe sicherzustellen.

Dieser Lernbereich bietet vielfältige Möglichkeiten zur Modellierung.

Kern

- exponentielle Wachstums- und Abnahmeprozesse modellieren
  - Sachsituationen iterativ und explizit modellieren
  - lineare und exponentielle Prozesse voneinander abgrenzen
  - Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum untersuchen
  - Bestimmen der Grenze G beim begrenzten Wachstum
  - Vergleich der expliziten und iterativen Darstellung
- Exponentialfunktionen untersuchen - Parametervariation
  - Zusammenhang von Funktionsgleichung und -graph für $f(x) = a \cdot b^x + c$
  - hilfsmittelfreies Skizzieren der Graphen $f(x) = a \cdot b^x$ für $b > 0$
  - Funktionsgleichungen aus zwei Punkten bestimmen, in einfachen Fällen hilfsmittelfrei
  - Ausgleichsfunktionen mithilfe des Regressionsmoduls oder Parametervariation bestimmen
- mit Potenzen rechnen
  - Rechengesetze exemplarisch begründen
  - Gleichungen umformen und lösen, in einfachen Fällen auch hilfsmittelfrei

Fakultative Erweiterungen

Spinnweb-Diagramme; iterative Modellierung des logistischen Wachstums

Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche

Zahlen und Operationen; Funktionaler Zusammenhang

Hinweise zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge

Tabellenkalkulation; CAS zum Lösen von Gleichungen; Regressionsmodul